Série d'exercice N°1

Fonctions numériques

Exercice 1

Soit la fonction f definie par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$, f est-elle injective? est-elle surjective?

Exercice 2

Soit la fonction f definie par $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

1) Etudier la parité de f

2) Etudier la dérivabilité f de en 0

3) Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1; 1[$

Exercice 3

Déterminer a et b deux réels de manière à ce que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) &= ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x \succ 1 \end{aligned}$$

soit dérivable sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4

Soit la fonction f definie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}$

f a-t-elle un prolongement par continuité en 1?.

Exercice 5

a et b deux nombres réels, on définit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) &= \frac{1}{1+x} \text{ si } x \succ 0 \end{aligned}$$

1) Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a et b tels que soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(0)$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \prec 0 \\ f(x) &= 1 \quad \text{si } x = 0 \\ f(x) &= x^2 + 1 \quad \text{si } x \succ 0 \end{aligned}$$

1) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2) Determiner l'ensemble des points ou f est dérivable.

3) Calculer $f'(x)$ou elle est dérivable.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ f(x) &= 2x + ax \text{ si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

1)Déterminer les valeurs de a tels que f soit continue sur $[0;1]$.
2) Déterminer les valeurs de a tels que f soit dérivable sur $[0;1]$.

Correction de la série N°1

Exercice1

1) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle).

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $f^{'}(x) = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$ (fonction rationnelle).

$f^{'}$s'annule pour les valeurs -1 et 1.

$$\begin{array}{rcl} f^{'}(x) & \prec & 0 \quad \text{si } x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\\ f^{'}(x) & \succ & 0 \quad \text{si } x \in \left]-1;1\right[\end{array}$$

donc $f\left(\left]-\infty;-1\right]\right) = \left[-1;0\right[$ car f est décroissante sur $\left]-\infty;-1\right]$.
$f\left(\left[-1;1\right]\right) = \left[-1;1\right]$ car f est croissante sur $\left[-1;1\right]$.
$f\left(\left[1;+\infty\right[\right) = \left[0;1\right]$ car f est décroissante sur $\left[1;+\infty\right[$.
d'où la conclusion $f(\mathbb{R}) = \left[-1;0\right[\cup \left[-1;1\right] \cup \left[0;1\right] = \left[-1;1\right]$
2)f est injective si $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & f(b) \Longrightarrow a = b. \\ \dfrac{2a}{a^2+1} & = & \dfrac{2b}{b^2+1} \Longrightarrow (a-b)(1-ab) = 0 \\ a & = & b \text{ ou } ab = 1 \end{array}$$

Donc f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.
f est-elle surjective ?
$\forall\ y \in \mathbb{R}$, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & y \Longleftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1} = y \\ & \Longleftrightarrow & yx^2 - 2x + 1 = 0 \\ & \triangle & = 4\left(1-y^2\right) \\ & \triangle & \geq 0 \text{ si } y \in [-1;1] \text{ dans ce cas il y a deux solutions} \\ & & \text{donc } f \text{ est surjective} \\ \text{si } y & \in & \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\quad \triangle \prec 0 \text{ donc pas de solutions en } x \\ & & f \text{ n'est pas surjective.} \end{array}$$

Exercice2

1) La parité de f : On dit que f est impaire si

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ on a } f(-x) = -f(x)$$

donc

$$f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$$

2) La dérivabilité de f en 0

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{x}{1+x}}{x} \right) = 1 \\
\lim_{x \longrightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \left(\frac{-\frac{x}{1+x}}{x} \right) = -1
\end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en 0.

3)f est bijective de $\mathbb{R} \longrightarrow]-1;1[$

$\forall y \in]-1;1[\ \exists \ x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$ admet une solution unique x

$$\begin{aligned}
f(x) &= y \Longleftrightarrow \frac{x}{1+|x|} = y \\
y(1+x) &= x \text{ pour } x \geq 0 \ \text{ donc } x = \frac{y}{1+y} \\
y(1-x) &= x \text{ pour } x \leq 0 \ \text{ donc } x = \frac{y}{1-y} \\
\text{donc } x &= \frac{y}{1+|y|}
\end{aligned}$$

Exercice3

Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $[0;+\infty[$.

f est dérivable à droite de 1

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{ax^2 + bx + 1 - a - b - 1}{x - 1} \right) = \\
\lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{ax^2 + bx - a - b}{x - 1} \right) &= \lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{a\left(x^2 - 1\right) + b(x-1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (a(x+1) + b) \\
&= 2a + b = l_1
\end{aligned}$$

f est dérivable à gauche de 1

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{x \longrightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) \\
&= \lim_{x \longrightarrow 1^-} \left(\frac{x - 1}{x - 1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \frac{1}{2} = l_2
\end{aligned}$$

donc

$$l_{1=}l_2 \Longleftrightarrow 2a + b = \frac{1}{2}$$

comme $f$est dérivable donc f est continue en 1

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)\\ \lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(ax^2+bx+1\right) &= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\sqrt{x}\Longleftrightarrow a+b+1=1\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}a+b &= 0 \text{ et } 2a+b=\frac{1}{2}\\ \text{d'ou } a &= \frac{1}{2}\ b=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice4

f n'est pas définie en 1 donc f est discontinue en 1.

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{-1}{1+x}\right)=-\frac{1}{2}$$

Donc la fonction f possède un prolongement par continuité en 1 définie par

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x) \quad \text{si } x\neq 1\\ g(x) &= -\frac{1}{2} \quad \text{si } x=1\end{aligned}$$